2023 年度　一般選抜Ⅱ期　数学

【問Ⅰ】以下の問いに解答せよ（25 点：5×5 点)。

（1）　$\frac{1}{\sqrt{x}} = 6$ を満たす x の値を求めよ。

$\frac{1}{\sqrt{x}} = 6$より　$6\sqrt{x} = 1$　であるから　$\sqrt{x} = \frac{1}{6}$　より両辺を 2 乗し、 x $= \frac{1}{36}$

（2）　$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ の値を求めよ。

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(3-2\sqrt{6}+2\right)+\left(3+2\sqrt{6}+2\right)}{3-2} = 10$$

（3）　$(4x^3 - 2x^2 + 3x)^2$を展開せよ。

$16x^6-16x^5+28x^4-12x^3+9x^2$

（4）　$\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ を簡単にせよ。

$$\sqrt{(2+5)+2\sqrt{2\times 5}} = \sqrt{2}+\sqrt{5}$$

（5）　2 進数において$(10011010010)_{(2)}$と表される値を 10 進数に変化すればいくらか。

1234

【問Ⅱ】　以下の問いに答えよ。

（１）　２次関数 $ax^2+bx+c=0$について、解の公式を導出せよ。

$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$ である。

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$ より　$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$b^2-4ac\geq 0$であるとき、$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（２）　奇数の２乗マイナス１は８の倍数であることを示せ。

奇数 n について k を整数とすれば、n=2k+1 である。
$n^2=(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4k(k+1)$ が得られる。
ここで連続する２つの整数 k，k+1 のいずれかは２の倍数であるから
k(k+1)は２の倍数である。そのため 4k(k+1)は８の倍数である。
したがって、奇数の２条から１を引いた数は８の倍数である。

【問Ⅲ】以下の設問①および②に解答せよ

①　長さ 40cm の針金を曲げて長方形を作る。このとき

（１）短い方の辺の長さをxcm として、長方形の面積(S)を x で表せ

（２）長方形の面積(S)が 36 ㎠以上 64 ㎠以下になるような、辺 x の長さの範囲を求めよ。

（１）$\frac{40-x}{2} = 20 - \mathrm{x}$

ここで$\begin{cases} x > 0 \\ 20 - x > 0 \\ x < 20 - x \end{cases}$　⇒　$\begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \\ x < 10 \end{cases}$　の範囲であるから、

$0 < \mathrm{x} < 10$より、$\mathrm{S} = \mathrm{x}(20 - \mathrm{x})$　$0 < \mathrm{x} < 10$

（２）$36 \leq \mathrm{x} \leq 64$　について（１）より$36 \leq \mathrm{x}(20 - \mathrm{x}) \leq 64$

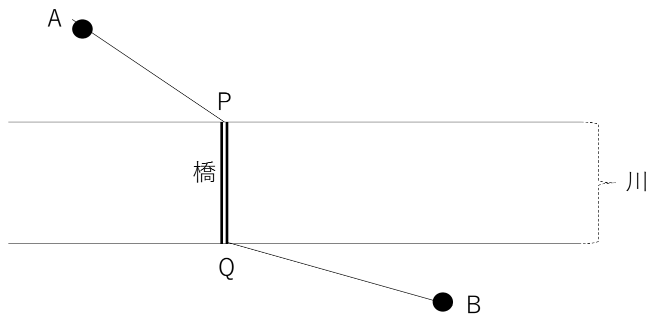
$\begin{cases} x(20 - x) \geq 36 \\ x(20 - x) \leq 64 \end{cases}$　について

①　$x^2 - 20x + 36 \leq 0$　より　$(x-2)(x-18) \leq 0$であるから$2 \leq \mathrm{x} \leq 18$

②　$x^2 - 20x + 64 \leq 0$より　$(x-4)(x-16) \geq 0$であるから$\mathrm{x} \leq 4, 16 \leq \mathrm{x}$

よって①、②より辺 x の範囲は、$2 \leq \mathrm{x} \leq 4$

② 両岸が平行な川をへだてて、2 地点 A と B がある。岸に垂直な橋 PQ をかけ、A から B へ橋 PQ を渡っていくのに、その道のりが最短となるようにしたい。橋 PQ の位置はどこにすればよいか。




平行な両岸を$\ell$と m とするとする。また BB’⊥m, BB’=PQ となる B‘をとると、四角形 BB’PQ は平行四辺形であるから、BQ=B’P。

また、⊿PAB’において AP+PB’≥AB’である。このとき、等号は点 P が線分 AB’と $\ell$ の交点 $P_o$ に一致するときに成立する。

ここで $P_oQ_o$⊥m となるような、点 $Q_o$ を線分 m の上に取ると、四角形 $P_oQ_o$BB’も平行四辺形であるから、$P_o$B‘＝$Q_o$B

∴ AB’=A$P_o$+$P_o$B’=A$p_o$+$Q_o$B

よって、AP+PQ+QB≥A$P_o$+$P_o$+$Q_o$+$Q_o$B　を満たす $P_o$,$Q_o$ の点に設置すればよい。

【問Ⅳ】学習塾において１～５の 5 人に対して国語と英語のテストを行った結果、以下の表が得られた。この表について、各問いに答えよ。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 平均 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 国語 | 67 | 92 | 58 | 76 | 82 | ① |
| 英語 | 90 | 85 | ② | 43 | 62 | 69 |

（１）上の表の①および②に入る適切な値を、それぞれ求めよ。

①　76　　　②　65

（２）国語と英語のメジアン（中央値）を、それぞれ求めよ。

国語のメジアン：76　　英語のメジアン：65

（３）それぞれの科目の標準偏差を求めたところ、国語は 11.76、英語は 16.96 という値を求めることができた。標準偏差の値を基に、各教科の分散を小数点以下第 2 位までの値を求めよ。

国語の分散：$(11.76)^2=138.40$
英語の分散：$(16.96)^2=287.60$

（４）国語と英語の共分散は 19.4 であり、それぞれの科目の標準偏差は上の（3）の問いのとおりである。国語と英語の相関係数を小数点以下第 2 位まで求めよ。

$$\mathrm{r} = \frac{19.4}{11.76 \times 16.96} = 0.10$$

（５）国語と英語の散布図を描き、これらの科目について相関関係があるかどうかを調べ、その結果を簡潔に説明せよ。


国語と英語の間の撒布図や上の(4)で求めた相関係数より、これらの教科の間に相関は見られない。