【問Ⅰ】以下の設問に答えよ。

（1）　$(x+y-z)(x-y+z)$ を展開せよ。(8点)

（解答例）$(x+y-z)(x-y+z) = (x+y-z)\{x-(y-z)\}$

$$= x^2-(y-z)^2$$

$$= x^2-y^2+2yz-z^2$$

（2）　次の値を求めよ。(以下、$|\quad|$ は絶対値記号である。)

$$\left|-\frac{1}{3}\right|$$

（解答例）（与式）$= \dfrac{1}{3}$　(5点)

（3）　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}$ を計算せよ。(6点)

（解答例）

（与式）$= \left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)$

$$= 1-\frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

（4）　$ax-12=3x-4a$（a は定数とする）を解け。(6点)

（解答例）

$ax-12 = 3x-4a$

$(a-3)x = -4(a-3)$

（ｉ）$a-3=0 \Rightarrow a=3$ の時、解は全ての実数（3点）

（ⅱ）$a-3\neq 0 \Rightarrow a\neq 3$ の時、$x=-4$（3点）

【問Ⅱ】２次関数のグラフ $y = f(x)$ の頂点が $(2,3)$ で、点 $(1,4)$ を通る。これについて、以下の設問に答えよ。

（１）　２次関数 $f(x)$ を求めよ。ただし、標準形 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ の形で答えること。

（２）　$0 \leqq x \leqq 5$ のとき $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

（３）　$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 4、y 軸方向に 8 だけ平行移動したものを $y = g(x)$ とする。関数 $g(x)$ を求めよ。

（４）　$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの交点の座標を求めよ。

（解答例）

（１）頂点が $(2,3)$ だから、$f(x) = a(x-2)^2 + 3$ と書ける。点 $(1,4)$ を通るので、

$f(1) = a(1-2)^2 + 3 = 4 \quad \therefore a = 1$　　よって、$f(x) = (x-2)^2 + 3$　(5 点)

（２）最大値は $x = 5$ のとき(2 点)、$f(5) = 12$（3 点）
最小値は $x = 2$ のとき(2 点)、$f(2) = 3$（3 点）
（計 10 点）

（３）頂点の座標が $(2,3) \to (6,11)$ と移動するので、$g(x) = (x-6)^2 + 11$（5 点）

(別解　$g(x) = x^2 - 12x + 47$ と答えてもよい。)

（４）$f(x) = g(x)$ として、

$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 12x + 47$

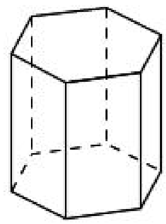
$\therefore x = 5$　したがって、交点の座標は $(5,12)$　(5 点)

【問Ⅲ】以下の設問に答えよ。

（1）男子3人、女子4人の合計7人が1列に並ぶとき、男子3人が続いて並ぶ並び方は何通りあるか。

（2） HACHIDAIの8文字を1列に並べるとき、すべての並べ方は何通りあるか。

（3） 正六角柱の8面を異なる8色で塗り分ける方法は何通りあるか。ただし、正六角柱とは、底面が正六角形で側面が長方形の角柱であり、右図のような立体形である。



（4）3人でじゃんけんを1回するとき、あいこになる確率を求めよ。

（5）1個のさいころを4回投げるとき、目の積が5の倍数となる確率を求めよ。

(解答例)

（1） 男子3人を一組にして考えると、5人の順列の総数が5！通り。
さらに、その各々の並び方に対して、男子3人の順列3！通りがあるから、積の法則より、$5!\times 3! = 120\times 6 = 720$通り（3点）

（2） HACHIDAIの文字列には、同じ文字H(2個)、A(2個)、I(2個)を含むので、

$\dfrac{8!}{2!2!2!} = 5040$通り（3点）

（3） まず、上面の塗り方が8通り、それに対し底面の塗り方が7通りある。次に、側面は円順列を考えて$(6-1)! = 5!$通りあるが、上下を逆さにすると、同じ塗り方が2通りずつあることを考慮して、$8\times 7\times 5!\times \dfrac{1}{2} = 3360$通り(8点)

（4）　全部の手の出方が$3^3=27$通りある。その中で、3 人とも同じ手の 3 通り、3 人とも異なる手が$3!=6$通りあるので、$\dfrac{3+6}{27}=\dfrac{1}{3}$ (3 点)

（5）　目の積が 5 の倍数となるのは、4 回中「少なくとも 1 回 5 の目が出る」ときである。したがって、余事象を考えて「4 回とも 5 の目が出ない」確率を考え、1 から引けばよい。よって、$1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^4=\dfrac{671}{1296}$ (8 点)

【問Ⅳ】△ABC において、BC＝5、CA＝6、AB＝7である。このとき、以下の設問に答えよ。

（１）$\cos A$を求めよ。

（２）$\sin A$を求めよ。

（３）△ABC の外接円の半径Rを求めよ。

（４）△ABC の面積Sを求めよ。

（５）△ABC の内接円の半径rを求めよ。

（解答例）

（１）　余弦定理より、$\cos A = \dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7} = \dfrac{5}{7}$（5 点）

（２）　$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2$　よって、$\sin^2 A = \dfrac{24}{49}$

$\sin A > 0$ より、$\sin A = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$（5 点）

（３）正弦定理より、$5 = 2R\times\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$　$\therefore R = \dfrac{35\sqrt{6}}{24}$（5 点）

（４）三角形の面積公式より、$S = \dfrac{1}{2}\times 6\times 7\times\dfrac{2\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}$（5 点）

⇒別解：3 辺が事前に明らかであるから、ヘロンの公式を用いても可とする。

（５）内接円の半径公式$r = \dfrac{2S}{a+b+c}$より、$r = \dfrac{12\sqrt{6}}{5+6+7} = \dfrac{12\sqrt{6}}{18} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$（5 点）