

【問I】以下の(1)～(5)の設問に解答せよ。(25点)

(1) $x(x-2)(x+3)$ を展開せよ。(5点)

【解答】

$$\begin{aligned} & x(x-2)(x+3) \\ &= x(x^2+x-6)=x^3+x^2-6x \end{aligned}$$

(2) $\left(x^2+\frac{2}{5}y\right)^3$ を展開せよ。(5点)

【解答】

$$\left(x^2+\frac{2}{5}y\right)^3=x^6+\frac{6}{5}x^4y+\frac{12}{25}x^2y^2+\frac{8}{125}y^3$$

(3) $\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}=0$ を満たす x の値を求めよ。(5点)

【解答】

解の公式を用いて、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\left(-\frac{2}{3}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{9}\right)\right)}}{2 \times \frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{24}{45}}}{\frac{6}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{24}{45}}}{\frac{6}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{44}{45}}}{\frac{6}{5}} \\ &= \frac{5}{6} \times \left(\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{44}{45}}\right) = \frac{5}{6} \times \left(\frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{11}}{3\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{9} \pm \frac{5\sqrt{11}}{9\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} \pm 5\sqrt{11}}{9\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times (5\sqrt{5} \pm 5\sqrt{11})}{45} \\ &= \frac{25 \pm 5\sqrt{55}}{45} = \frac{5 \pm \sqrt{55}}{9} \end{aligned}$$

(別解)

両辺に45を掛けて、分母を払うと、

$$45 \times \left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\right) = 0$$

$$27x^2 - 30x - 10 = 0$$

解の公式に代入し、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \times 27 \times (-10)}}{2 \times 27} = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 1080}}{54} = \frac{30 \pm \sqrt{1980}}{54} = \frac{30 \pm 6\sqrt{55}}{54} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{55}}{9} \end{aligned}$$

- (4)
- $\sqrt{2}$
- から
- $\sqrt{250}$
- までの範囲に含まれる自然数の和を求めよ。(5点)

【解答】

$x = \sqrt{x^2}$ にあつて、根号を外した際に自然数となるのは、設問の範囲では、

$\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}, \sqrt{64}, \sqrt{81}, \sqrt{100}, \sqrt{121}, \sqrt{144}, \sqrt{169}, \sqrt{196}, \sqrt{225}$ である。

これらは、根号を外せば、 $\pm 2 \sim \pm 15$ となる。また自然数であるから、正の値のみをとる。そのため、

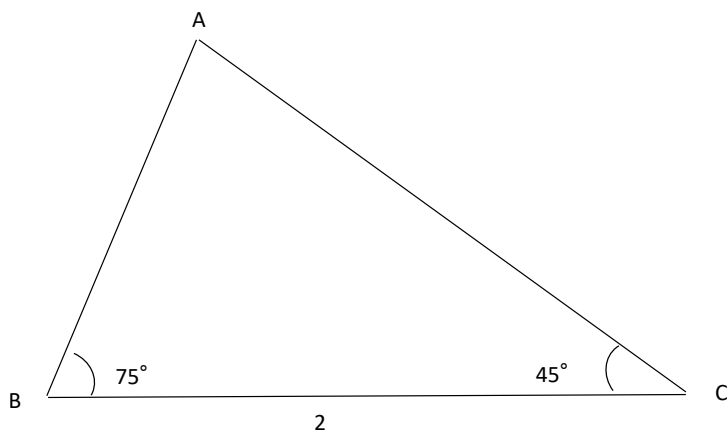
$$2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 = 119$$

- (5)
- $\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$
- の二重根号を外し、有理化し、最も簡単な形に変形せよ。(5点)

【解答例】

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} &= \frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{(2+6)+2(2\cdot 6)}}{\sqrt{(2+3)-2(2\cdot 3)}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}}{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \times (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}+2+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3-2} = \sqrt{6}+2+3\sqrt{2}+2\sqrt{3} \end{aligned}$$

【問 II】以下の図に示した△ABC について、設問に答えよ。(25 点)



- (1) $\angle BAC$ の角度の大きさを求めよ。(3 点)

【解答例】

$$180 - (75 + 45) = 60 (^{\circ})$$

- (2) 辺 AB の長さを求めよ。(5 点)

【解答例】

正弦定理より、

$$\frac{2}{\sin 60^{\circ}} = \frac{AB}{\sin 45^{\circ}} \text{ であるから、}$$

$$AB = 2 \times \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

- (3) 辺 AC の長さを求めよ。(10 点)

【解答例】

辺 AC の長さを x とする。

上の (2) より、 $AB = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ である。

余弦定理を用いれば、

$$2^2 = x^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2 \times x \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \cos 60^{\circ}$$

$$4 = x^2 + \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3}x$$

$$x^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

ここで、解の公式より、

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{4}{3}\right)}}{2} \\
 &= \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3} \pm \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{16}{3}}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{3} \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

ただし、 $x > 0$ であることから、

$$\text{辺 } AC \text{ の長さは、 } AC = \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}$$

- (4) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。(7 点)

【解答例】

$\triangle ABC$ の面積を S とすると、 $S = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin 45^\circ$ で求められる。図より $BC=2$ 、

上の (3) より $AC = \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}$ であるから、これらを代入し、

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) \text{ であるから、 } S = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)$$

【問Ⅲ】 大学を卒業し社会人となった学院 学さんは、この度、めでたく結婚することとなり、結婚披露宴当日の着席場所について検討している。

いま、出席者の座席を指定するのにあたって、大学時代の同じ研究室に所属していた同級生の 8 人 (A,B,C,D,E,F,G,H) が 1 つの円形のテーブル (円卓) にまとまるように設定し、この円卓内の着席場所について考えている。さらには、友人からの挨拶や記念撮影など、当日の詳細な内容についても検討中である。以下の設問に答えよ。(25 点)

- (1) A,B,C,D,E,F,G,H が円状のテーブル (円卓) に着席するのは何通りあるか。(5 点)

【解答例】

$$(8-1)! = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 \text{ (通り)}$$

- (2) C,D が隣り合う並び方は、何通りあるか。(5 点)

【解答例】

C, D は必ず隣り合わせになることから、C,D を一通りと考えると、実質 7 人である。そのため、 $(7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

また、C と D の並ぶ順については、C,D あるいは D,C の 2 通り ($2! = 2$) であることから、 $(7-1)! \times 2! = 6! \times 2! = (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 720 \times 2 = 1440$

- (3) C,D が向かい合うのは何通りあるか。(5 点)

【解答例】

C,D を固定すると、残りは、 $8-2=6$ であるから、

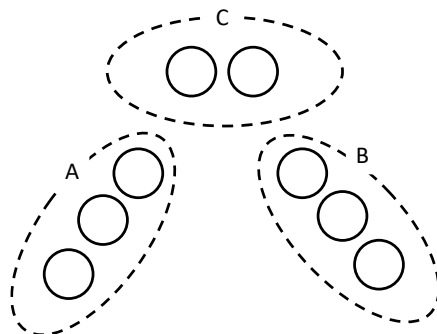
$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

- (4) A,B,C,D,E,F,G,H の 8 人から、2 人に学生時代の思い出やエピソードを語ってもらいたい。8 人から 2 人を選ぶのは何通りあるか。(5 点)

【解答例】

$${}_8C_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28$$

(5) A,B,C,D,E,F,G,H の 8 人は、久しぶりに集まったので記念撮影をすることにした。



上の図のように 8 人を組 A に 3 人、組 B に 3 人、組 C に 2 人の 3 つの組に分けるのは、何通りあるか。ただし、A,B の組については、区別はないものとする。(5 点)

【解答例】

$${}^8C_3 \times {}^5C_3 \times {}_2C_2 \div 2 = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{5!}{3!2!} \times 1 \div 2 = 56 \div 2 = 28$$

【問Ⅳ】学習塾でアルバイトをしている八戸正夫さんは、国語と数学を教えている。

これらの教科について家庭での勉強時間のデータを取り、2教科の間でどのような相関があるか調べてみた。その結果、以下の表のような値を求めることができた。

その結果を表にまとめ資料を作成したが、プリンターの印刷が薄く、ところどころ求めた値が見えなくなってしまうので空欄となっている(なお、問題では空欄の箇所をグレーで塗りつぶしている)。

この表について、以下の問いに答えよ。

国語		数学	
平均	89.5	平均	72.2
分散		分散	81.0
標準偏差	6.0	標準偏差	
国語と数学の共分散			
国語と数学の相関		0.65	

(1) 国語の分散 (s_J^2) の値を求めよ。(5点)

【解答例】

$$\text{分散} = (\text{標準偏差})^2 \text{であるから、} s_J^2 = (6)^2 = 36$$

(2) 数学の標準偏差 (s_M) の値を求めよ。(5点)

【解答例】

$$\text{標準偏差} = \sqrt{\text{分散}} \text{であるから、} s_E = \sqrt{81.0} = \sqrt{(9.0)^2} = 9.0$$

(3) 国語と数学の共分散を求めよ。(10点)

【解答例】

相関の公式は、 $\text{相関} = \frac{\text{変数}x, y\text{の共分散}}{\text{変数}x\text{の標準偏差} \times \text{変数}y\text{の標準偏差}}$ であるから、表より、

相関=0.65, 国語の標準偏差=6, 数学の標準偏差は上の(2)で求めた、9.0であるから、上の公式に当てはめると、

$$\frac{\text{国語と数学の共分散}}{6 \times 9} = 0.65 \text{ であるから、}$$

$$\text{国語と数学の共分散} = 0.65 \times 6 \times 9 = 35.1$$

(4) 国語と数学には、どのような関係があるか。表から読み取れる内容を基に完結に説明せよ。(5点)

【解答例】

国語と数学の相関(係数)は、表より0.65であることから、「正の相関」があるといえる。