

【 I 】 次の各問に答えよ (25 点)。

(1) $(x^2 + 4)(x^2 - 3)$ を展開せよ (5 点)。

$$(x^2 + 4)(x^2 - 3) = x^4 - 3x^2 + 4x^2 - 12 = x^4 + x^2 - 12$$

(2) $(x^2 + 2x - 5)(x^2 + 2x + 1)$ を展開せよ (5 点)。

$$(x^2 + 2x) = X \text{ とおくと、}$$

$$(x^2 + 2x - 5)(x^2 + 2x + 1) = (X - 5)(X + 1) = X^2 + X - 5X - 5 = X^2 - 4X - 5$$

$$X = (x^2 + 2x) \text{ を代入し、}$$

$$(x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) - 5 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 8x - 5 = x^4 + 4x^3 - 8x - 5$$

(3) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 3$ を因数分解せよ (5 点)。

$$\begin{aligned} &= (x^4 + 6x^3 + 9x^2) - 2x^2 - 6x - 3 = (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 3 \\ &= (x^2 + 3x - 3)(x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{3 + \sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ (5 点)。

$$\frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{3 - \sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

(5) $\frac{2}{3 - \sqrt{5}} - \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$ を簡単にせよ (5 点)。

$$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} - \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2(3 + \sqrt{5}) - 2(3 - \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 6 + 2\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{4\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$$

【Ⅱ】 三角形 ABC の各辺の長さを、 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ とおき、このうち $a = 8, c = 12$ が与えられている。また、 $\angle B = 60^\circ$ である。このとき、次の各問に答えよ。

(1) b の値を求めよ(6 点)。

三角形 ABC について、以下の通り余弦定理が成立する。

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ$$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ であり、問題文より $a = 8, c = 12$ であるから、それぞれを代入し、

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ = (8)^2 + (12)^2 - 2 \times 8 \times 12 \times \frac{1}{2} = 112 \text{ より、 } b = 4\sqrt{7}$$

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ(6 点)。

$\angle B = 60^\circ$ であるから、 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ および $a = 8, c = 12$ であることから、

$$S = \frac{1}{2} ac \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

(3) 三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ(6 点)。

三角形 ABC において、正弦定理より、

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = 2R$$

上記設問 (1) より、 $b = 4\sqrt{7}$ および $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、

$$R = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$$

(4) 三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ(7 点)。

r, S および a, b, c の間に、 $r(a+b+c) = 2S$ が成立する。

$a = 8, b = 4\sqrt{7}, c = 12, S = 24\sqrt{3}$ をそれぞれ代入すれば、

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{48\sqrt{3}}{20+4\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})} = \frac{60\sqrt{3}-12\sqrt{21}}{18} = \frac{10\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{3}$$

【Ⅲ】以下の各問に答えよ。

(1) n は整数であるとき、 n^2 を 3 で割った余りを求めよ(5 点)。

① $n = 2k$ の場合。 $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ $4k^2 = 3k^2 + k^2$ $3k^2$ は整数であるから、 n^2 を 3 で割った余りは k^2 である。

② $n = 2k + 1$ の場合。 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

$3k^2 + 2k$ は整数であることから、 n^2 を 3 で割った余りは 1。
上の①、②よりこの場合の余りは、0 か 1 である。

(2) $4n^2$ が 4 で割り切れることを証明せよ(5 点)。

k を整数とする。

① $n = 2k$ の場合。 $4n^2 = 4(2k)^2 = 16k^2$ $16k^2 = 4 \times 4k^2$ $4k^2$ は整数であるから、
 $4n^2$ は 4 で割り切れる。

② $n = 2k + 1$ の場合。 $4n^2 = 4(2k + 1)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1)$

$4k^2 + 4k + 1$ は整数であることから、 $4n^2$ を 4 で割った余りは 0。
上の①、②より、 $4n^2$ は 4 で割り切れることが証明された。

(3) 2 進数で与えられている 2 つの数、 $1011000_{(2)}$ 、 $111100_{(2)}$ をそれぞれ 10 進数で表せ
(6 点)。

$1011000_{(2)}$ を 10 進数で表せば、 $1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 88$

$111100_{(2)}$ を 10 進数で表せば、 $1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 60$

(4) (3) で求めた値を基に、それぞれの 10 進数に表しなおした数の積を求めよ(4 点)。

$$88 \times 60 = 5280$$

(5) 29^{2018} を 10 進数で表すとき、一の位の数字を求めよ(5 点)。

【IV】 7 人をいくつかの部屋に分ける問題を考える。ただし、各部屋は十分に大きく、定員については考慮しなくてもよいとする。この時、次の各問に答えよ。

- (1) 7 人について、部屋 A に 4 人、部屋 B に 3 人となるような分け方は何通りあるか、また、部屋 A に 5 人、部屋 B に 2 人となるような分け方は何通りあるか、それぞれ求めよ(10 点)。

$$7 \text{ 人から } 3 \text{ 人を選ぶ方法は、 } {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35 \quad 35 \text{ 通り}$$

$$7 \text{ 人から } 2 \text{ 人を選ぶ方法は、 } {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21 \quad 21 \text{ 通り}$$

- (2) 7 人を、部屋 A、部屋 B に分けるとき、どの部屋も 1 人以上になる分け方は何通りあるか求めよ(5 点)。

7 人を 3 人と 4 人に分ける方法は、上の (1) に部屋 A に 3 人、部屋 B に 4 人となる場合を加えると、

$${}_7C_3 \times 2 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} \times 2 = 35 \times 2 = 70$$

同様に、7 人を 2 人と 5 人に分ける方法は、

$${}_7C_2 \times 2 = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} \times 2 = 21 \times 2 = 42$$

7 人を 1 人と 6 人に分ける方法は、

$${}_7C_1 \times 2 = \frac{7}{1} \times 2 = 7 \times 2 = 14$$

であるから、 $70 + 42 + 14 = 126$ 126 通り

- (3) 7 人を空き部屋が出ないよう 3 つの部屋 A, B, C に分けるとき、3 人部屋が含まれる分け方は何通りあるか求めよ(10 点)。

7 人を空き部屋が無いように 3 部屋に分けるとき、3 人部屋が含まれる分け方は、(i) 3 人部屋が 1 つ、2 人部屋が 2 つ、(ii) 3 人部屋が 2 つ、1 人部屋が 1 つの 2 通りである。以下、(i) および (ii) に場合分けし、考える。

(i) 3 人部屋が 1 つ、2 人部屋が 2 つの場合。

部屋 A のみが 3 人部屋であり、それ以外の B および C が 2 人部屋である場合、

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times 2 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{4 \times 3}{1 \times 2} \times 2 = 420$$

部屋 B のみ、部屋 C のみを、それぞれ 3 人部屋とする場合を考慮すれば、分け方の総数は $420 \times 3 = 1260$

(ii) 3 人部屋が 2 つ、1 人部屋が 1 つの場合。

部屋 A のみを 1 人部屋とするとき、7 人から 1 人を選び、残った 6 人から 3 人を

選び、B および C のいずれかの部屋に分ける場合、

$${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times 2 = \frac{7}{1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times 2 = 7 \times 20 \times 2 = 280$$

部屋 B のみ部屋 C のみが 1 人部屋で、他が 3 人部屋である分け方は、

$$280 \times 3 = 840$$

よって、(i) および (ii) より、空き部屋を出さずに 3 人部屋が含まれる分け方の総数は、

$$1260 + 840 = 2100$$

2100 通り