【Ⅰ】次の各問に答えよ（25 点）。

（１）$(x^2+4)(x^2-3)$を展開せよ（5 点）。

$$(x^2+4)(x^2-3)=x^4-3x^2+4x^2-12=x^4+x^2+12$$

（２）$(x^2+2x-5)(x^2+2x+1)$を展開せよ（5 点）。

$(x^2+2x)=X$ とおくと、

$$(x^2+2x-5)(x^2+2x+1)=(X-5)(X+1)=X^2+X-5X-5=X^2-4X-5$$

$X=(x^2+2x)$を代入し、

$$(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)-5=x^4+4x^3+4x^2-4x^2-8x-5=x^4+4x^3-8x-5$$

（３）$x^4+2x^3+7x^2-6x-3$ を因数分解せよ（5 点）。

$$=(x^4+6x^3+9x^2)-2x^2-6x-3=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-3$$
$$=(x^2+3x-3)(x^2+3x+1)$$

（４）$\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ（5 点）。

$$\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{3-\sqrt{5}}{9-5}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

（５）$\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$ を簡単にせよ（5 点）。

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}}-\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2(3+\sqrt{5})-2(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{6+2\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{9-5}=\frac{4\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}$$

【Ⅱ】三角形 ABC の各辺の長さを、$AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ とおき、このうち $a=8, c=12$ が与えられている。また、$\angle B=60^\circ$ である。このとき、次の各問に答えよ。

（１） b の値を求めよ(6 点)。
三角形 ABC について、以下の通り余弦定理が成立する。
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ$
$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ であり、問題文より $a=8, c=12$ であるから、それぞれを代入し、
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ=(8)^2+(12)^2-2\times 8\times 12\times\dfrac{1}{2}=112$ より、$b=4\sqrt{7}$

（２）三角形 ABC の面積 S を求めよ(6 点)。
$\angle B=60^\circ$ であるから、$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ および $a=8, c=12$ であることから、
$S=\dfrac{1}{2}ac\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 8\times 12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$

（３）三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ(6 点)。
三角形 ABC において、正弦定理より、
$\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=2R$
上記設問（１）より、$b=4\sqrt{7}$ および $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、
$R=\dfrac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$

（４）三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ(7 点)。
r, S および a, b, c の間に、$r(a+b+c)=2S$ が成立する。
$a=8, b=4\sqrt{7}, c=12, S=24\sqrt{3}$ をそれぞれ代入すれば、

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{48\sqrt{3}}{20+4\sqrt{7}}=\frac{12\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{12\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}=\frac{60\sqrt{3}-12\sqrt{21}}{18}=\frac{10\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{3}$$

【Ⅲ】以下の各問に答えよ。

（１） n は整数であるとき、n^2 を３で割った余りを求めよ(5 点)。

①$n=2k$ の場合。$n^2=(3k)^2=9k^2$　$9k^2=6\times 3k^2$　　$3k^2$ は整数であるから、n^2 を３で割った余りは 0 である。

②$n=2k+1$ の場合。$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$3k^2+2k$ は整数であることから、n^2 を３で割った余りは１。
上の①、②よりこの場合の余りは、０か１である。

（２） $4n^2$ が４で割り切れることを証明せよ(5 点)。
k を整数とする。

①$n=2k$ の場合。$4n^2=4(2k)^2=16k^2$　$16k^2=8\times 2k^2$　　$2k^2$ は整数であるから、$2n^2$ は４で割り切れる。

②$n=2k+1$ の場合。$4n^2=4(2k+1)^2=16k^2+16k+4=4(4k^2+2k+2)$

$2k^2+2k$ は整数であることから、n^2 を４で割った余りは０。
上の①、②より、$4n^2$ は４で割り切れることが証明された。

（３）2 進数で与えられている２つの数、$1011000_{(2)}$，$111100_{(2)}$ をそれぞれ 10 進数で表せ(6 点)。

$1011000_{(2)}$ を 10 進数で表せば、$1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0=88$

$111100_{(2)}$ を 10 進数で表せば、$1\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0=60$

（４）（３）で求めた値を基に、それぞれの 10 進数に表しなおした数の積を求めよ(4 点)。
$88\times 60=5280$

（５） 29^{2018} を 10 進数で表すとき、一の位の数字を求めよ(5 点)。

6

【Ⅳ】7 人をいくつかの部屋に分ける問題を考える。ただし、各部屋は十分に大きく、定員については考慮しなくてもよいとする。この時、次の各問に答えよ。

（１） 7 人について、部屋 A に 4 人、部屋 B に 3 人となるような分け方は何通りあるか、また、部屋 A に 5 人、部屋 B に 2 人となるような分け方は何通りあるか、それぞれ求めよ(10 点)。

7 人から 3 人を選ぶ方法は、 ${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{1\times2\times3}=35$ 　　35 通り

7 人から 2 人を選ぶ方法は、 ${}_7C_2=\dfrac{7\times6}{1\times2}=21$ 　　21 通り

（２） 7 人を、部屋 A、部屋 B に分けるとき、どの部屋も 1 人以上になる分け方は何通りあるか求めよ(5 点)。

7 人を 3 人と 4 人に分ける方法は、上の（１）に部屋 A に 3 人、部屋 B に 4 人となる場合を加えると、

$${}_7C_3\times2=\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}\times2=35\times2=70$$

同様に、7 人を 2 人と 5 人に分ける方法は、

$${}_7C_2\times2=\frac{7\times6}{1\times2}\times2=21\times2=42$$

7 人を 1 人と 6 人に分ける方法は、

$${}_7C_1\times2=\frac{7}{1}\times2=7\times2=14$$

であるから、 $70+42+14=126$ 　　126 通り

（３） 7 人を空き部屋が出ないよう 3 つの部屋 A, B, C に分けるとき、3 人部屋が含まれる分け方は何通りあるか求めよ(10 点)。

7 人を空き部屋が無いように 3 部屋に分けるとき、3 人部屋が含まれる分け方は、（ⅰ）3 人部屋が 1 つ、2 人部屋が 2 つ、（ⅱ）3 人部屋が 2 つ、1 人部屋が 1 つの 2 通りである。以下、（ⅰ）および（ⅱ）に場合分けし、考える。

（ⅰ）3 人部屋が 1 つ、2 人部屋が 2 つの場合。

部屋 A のみが 3 人部屋であり、それ以外の B および C が 2 人部屋である場合、

$${}_7C_3\times{}_4C_2\times2=\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}\times\frac{4\times3}{1\times2}\times2=420$$

部屋 B のみ、部屋 C のみを、それぞれ 3 人部屋とする場合を考慮すれば、分け方の総数は $420\times3=1260$

（ⅱ）3 人部屋が 2 つ、1 人部屋が 1 つの場合。

部屋 A のみを 1 人部屋とするとき、7 人から 1 人を選び、残った 6 人から 3 人を

選び、B および C のいずれかの部屋に分ける場合、

$${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times 2 = \frac{7}{1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times 2 = 7 \times 20 \times 2 = 280$$

部屋 B のみ部屋 C のみが 1 人部屋で、他が 3 人部屋である分け方は、

$280 \times 3 = 840$

よって、（ｉ）および（ⅱ）より、空き部屋を出さずに 3 人部屋が含まれる分け方の総数は、

$1260 + 840 = 2100$　　　　2100 通り