【Ⅰ】以下の各問に答えよ。

（1）　$(2x+3y)^4$ を求めよ。

$$(2x+3y)^4=(2x+3y)^2\times(2x+3y)^2=\left(4x^2+12xy+9y^2\right)^2$$
$$=16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4$$

（2）　$f(x)=2x^2-4x+2$ であるとき、以下の設問に答えよ。

（ⅰ）因数分解をせよ。

$$f(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$$

（ⅱ）　$f(3)$ の値を求めよ。

$$f(x)=2(3-1)^2=2\cdot 2^2=8$$

（ⅲ）　$f\left(\sqrt{5}\right)$ の値を求めよ。

$$f(x)=2\left(\sqrt{5}-1\right)^2=2\left(5-2\sqrt{5}+1\right)=2\left(6-2\sqrt{5}\right)=12-4\sqrt{5}$$

（ⅳ）　$f(x)=0$ を満たす、x の値を求めよ。

$f(x)=2(x-1)^2=0$ より、$x=1$

（3）　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}},b=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ であるとき、以下の設問に答えよ。

（ⅰ）　$a+b$ の値を求めよ。

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{18}}{-1}=-2\sqrt{18}=-6\sqrt{2}$$

（ⅱ）　$a\times b$ の値を求めよ。

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=6$$

【Ⅱ】 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$， $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ であるとき、次の値を求めよ。

（１）　$\sin\theta\cos\theta$　(7 点)

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すれば、

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ より、 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

（２）　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(8 点)

(1)の計算過程を利用すれば、

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(-\sin\theta\cos\theta+1)=\frac{1}{27}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$$

（３）　三角形 ABC における、内部の任意の 1 点を P とするとき、以下の問いに答えよ。

（ｉ）　表記の三角形について図示せよ　(2 点)

（ⅱ）　$AP+BP+CP>\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA)$ であることを証明せよ(8 点)。

△ABP において、AP+BP＞AB

△BCP において、BP+CP＞BC

△CAP において、CP+AP＞CA

辺々それぞれを加えると、2AP＋2BP＋２CP＞AB＋BC＋CA

よって $AP+BP+CP>\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA)$ が成立する。

【Ⅲ】　x について 2 次関数 $y = x^2 - 6x + 8$ …①と 1 次関数 $y = -x + a$ …②がそれぞれ与えられている。そして、①のグラフを $\boldsymbol{G}$、②のグラフを $\boldsymbol{L}$ とおく。
この時、次の各問に答えよ。ただし、 a は定数である。

（1）　$\boldsymbol{G}$ が x 軸と交わる 2 点のうち、x 座標の小さい点を $\boldsymbol{A}$、x 座標の大きい点を $\boldsymbol{B}$ とおく。このとき、2 交点 $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ の値をそれぞれ求めよ(10 点)。

与えられた関数、 $y = x^2 - 6x + 8$ より、 $y = x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2) = 0$ を満たす

x の値は、 $x = 4,2$ である。ここで、問題より $\boldsymbol{A}$＜$\boldsymbol{B}$ であるから、求める座標は、
$A = (2,0)$　 $B = (4,0)$

（2）　$\boldsymbol{L}$ が（1）で求めた 2 交点のうち、$\boldsymbol{B}$ を通るとき、a の値を求めよ。また、このとき、$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{G}$ との 2 交点のうち $\boldsymbol{B}$ 以外の交点を $\boldsymbol{C}$ とおく場合、$\boldsymbol{C}$ の座標を求めよ(10 点)。
$y = -x + a$ が $B = (4,0)$ を通ることから、座標 B の値を代入すれば、 $a = 4$
次に、$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{G}$ との 2 交点の座標を求めると、

$x^2 - 6x + 8 = -x + 4$ より、 $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) = 0$ であるから、 $x = 1,4$

B 以外の交点が C であることから、C の x 座標は 1 でなければならない。
よって、 $x = 1$ を関数②に代入すれば、 $y = -1 + 4 = 3$
座標 C の値は、 $B = (1,3)$

（3）（2）のとき、三角形 ABC の面積 S を求めよ。
（1）より、三角形ABCの底辺ABの長さは、2である。（2）より三角形ABCの長さは3である。

よって、 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

【Ⅳ】次の各問に答えよ。

（１）　１から 10 までの自然数の集合 $\boldsymbol{U}$ 及びその部分集合 $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ について、

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,5,6,7,10\}$,　$\overline{A} \cap B = \{5,6,7\}$,　$\overline{A \cup B} = \phi$ （空集合）

であるとき、次の集合を求めよ。

（ｉ）　$A \cap B$　　（5 点）

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ であり、しかも、$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,5,6,7,10\}$

と求められるから、$A \cap B = \{3,4,8,9\}$ と求めることができる。

（ⅱ）　A　　（5 点）

$\overline{A} \cap B = \{5,6,7\}$ 及び、（１）の結果とあわせて、$B = \{3,4,5,6,7,8,9\}$ と求め

ることができる。また、$\overline{A \cup B} = \phi$　であるから $\{1,2,10\}$ は A に含まれる。

これらと、（１）の結果をあわせて、$A = \{1,2,3,4,8,9,10\}$ と求めることができる。

（２）　A,B,Cの３人でゲームを行い、１回のゲームの勝者は１人とする。A,B,Cそれぞれの勝つ確率を、$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ とし、先に2回勝った者を優勝とする。このとき次の確率を求めよ。

（ｉ）　２回目でBが優勝する確率(5点)。

２回目で B が優勝するのは、B が２回連続で勝つ場合である。その確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

（ⅱ）　３回目でBが優勝する確率　(5点)。

３回目で B が優勝するのは、最初の２回のゲームのうち、どちらか１回だけ B が勝ち、かつ３回目に B が勝つ場合である。その確率は、

$${}_2C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

（ⅲ）　B が優勝する確率　(5 点)。

4 回目で B が優勝するのは、最初の 3 回のゲームで A,B,C が 1 回ずつ勝ち、4 回目に B が勝つ場合である。その確率は、

$$3! \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{18}$$

4回のゲームで必ずA,B,Cのいずれかが優勝するので、5回目以降のゲームでBが優勝することはない。ゆえに、Bが優勝する確率は、

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{1}{18}=\frac{6+8+3}{54}=\frac{17}{54}$$