【問Ⅰ】（1） $3x^2+5x+2=0$ 　を満たす x の値を求めよ（5 点）。

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{-5\pm1}{6}\qquad x=-1,-\frac{2}{3}$$

（2） $x=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ および $y=\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ であるとき、次の値を求めよ(15 点、各 5 点)。

（ⅰ） $x+y$

$$x+y=\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=\frac{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)+\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}$$
$$=\frac{4-4\sqrt{5}+5+\left(4+4\sqrt{5}+5\right)}{4-5}=-18$$

（ⅱ） $x^2\cdot y^2$

$$x^2y^2=\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^2\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\frac{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=1$$

【別解】

$$xy=\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\cdot\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=1\Rightarrow x^2y^2=(xy)^2=1$$

（ⅲ） $2x^2+3xy+y^2$

$$2x^2+3xy+y^2=\left(2x+y\right)\left(x+y\right)$$
$$2x+y=\frac{2\left(2-\sqrt{5}\right)^2+\left(2+\sqrt{5}\right)^2}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=-27+4\sqrt{5}$$
$$x+y=-18$$
$$\left(2x+y\right)\left(x+y\right)=-18\left(-27+4\sqrt{5}\right)=486-72\sqrt{5}$$

（３） $1+\sqrt{7}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 $b+\dfrac{1}{b^2}$ を求めよ(5 点)。

$\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3$ であるから、 $2<\sqrt{7}<3$ である。そのため $\sqrt{7}$ 整数部分は 2 である。

よって、 $1+\sqrt{7}$ の整数部分は 3、小数部分は、 $b=\left(1+\sqrt{7}\right)-3=\sqrt{7}-2$ であるから、

$$
\begin{aligned}
b+\frac{1}{b^2} &= \left(\sqrt{7}-2\right)+\frac{1}{\left(\sqrt{7}-2\right)^2} = \left(\sqrt{7}-2\right)+\frac{1}{11-4\sqrt{7}} = \frac{\left(11-4\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-2\right)+1}{11-4\sqrt{7}} \\
&= \frac{\left(11\sqrt{7}-22-28+8\sqrt{7}\right)+1}{11-4\sqrt{7}} = \frac{19\sqrt{7}-49}{11-4\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

【問Ⅱ】2 次関数　$y=-x^2+2x+3$　…①　が与えられている。

このとき、以下の問いに答えよ。

（1）　①のグラフの頂点の座標を求めよ（4 点）。

$$y=-x^2+2x+3$$

$$=-(x^2-2x)+3$$

$$=-[(x-1)^2-1]+3$$

$$=-(x-1)^2+1+3$$

$$=-(x-1)^2+4$$

よって(1,4)

答　(1,4)

（2）　①のグラフの、x 軸との交点の座標を求めよ（4 点）。

$$-x^2+2x+3=0$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

よって(-1,0)と(3,0)

答　(-1,0)(3,0)

（3）　2 次関数　$y=-x^2-3x+\frac{3}{4}$　のグラフは、（1）で求めた①のグラフの各座標を、x 方向、y 方向のそれぞれに対し、どれだけ平行移動させたものか求めよ。（4 点）

$$y=-x^2-3x+\frac{3}{4}$$

$$=-(x^2+3x)+\frac{3}{4}$$

$$=-\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+\frac{3}{4}$$

$$= -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 3$$

よって、グラフの頂点は$\left(-\frac{3}{2},\ 3\right)$であり、このグラフは（1）のグラフを x 方向へ$-\frac{5}{2}$、y 方向へ-1 移動させたもの

答　x 方向へ$-\frac{5}{2}$、y 方向へ -1

（4）　（1）で求めた①のグラフの頂点を A とする。

また、①のグラフと $y=-2x-2$ との交点をそれぞれ P，Q（ただし x 座標は $P<Q$ とする）とする。このとき、ΔAPQ の面積を求めよ（7 点）。

$$-x^2+2x+3=-2x-2$$

$$-x^2+4x+5=0$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$(x+1)(x-5)=0$$

よって、P(-1,0)、Q(5,-12)

直線 AQ の式を求めると$y=-4x+8$となり x 軸との交点は(2,0)となる。これを点 B とする。

△APQ＝△ABP+△PBQ より

△ABP=$3\times4+2=6$

△PBQ=$3\times12+2=18$

以上より、△APQ の面積は 24 となる。　答　24

（5）　（4）のとき、ΔAPQ の外接円の半径 R を求めよ（6 点）。

AP=$\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

AQ=$\sqrt{4^2+16^2}=\sqrt{272}=\sqrt{17\times4\times4}=4\sqrt{17}$

PQ=$\sqrt{6^2+12^2}=\sqrt{180}=\sqrt{5\times6\times6}=6\sqrt{5}$

∠AQP を α とし、AP=a、AQ=b、PQ=C とする。このとき、$a=2\sqrt{5}, b=4\sqrt{17}, c=6\sqrt{5}$であるから、余弦定理より、

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{272+180-20}{2*4\sqrt{17}*6\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{432}{48\sqrt{85}}$$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{85}}$$

以上より、

$$sin^2\alpha=1-\left(\frac{9}{\sqrt{85}}\right)^2=\frac{4}{85}$$

よって

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{85}}$$

正弦定理より

$$2R=\frac{a}{sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2R=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{2}{\sqrt{85}}}=2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{85}}{2}=\sqrt{425}$$

$$\Leftrightarrow 2R=5\sqrt{17}$$

よって、 $R=\frac{5\sqrt{17}}{2}$　　　答　$R=\frac{5\sqrt{17}}{2}$

【Ⅲ】 x の 2 次方程式 $x^2-2(3a-1)x+9a^2-8=0$ が次の条件を満たすような実数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

（１）　異なる 2 個の実数解をもつ（５点）。

$f(x)=x^2-2(3a-1)x+9a^2-8$ とおく。$f(x)=0$ の判別式を D とすると、

$D/4=(3a-1)^2-(9a^2-8)=-3(2a-3)$

異なる 2 個の実数解をもつ条件は、$D>0$
よって、$-3(2a-3)>0$

したがって、$a<\dfrac{3}{2}$

（２）　異なる実数解をもち、2 つの解がともに正である（１０点）。
異なる実数解をもち、2 つの解がともに正である条件は、$D>0$ かつ軸>0 かつ $f(0)>0$

$D>0$ から、$a<\dfrac{3}{2}$　・・・①

軸$=3a-1>0$ から、$a>\dfrac{1}{3}$ ・・・②

$f(0)=9a^2-8>0$ から、$a<-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}<a$ ・・・③

よって、求める a の範囲は①、②、③の共通範囲から、$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}<a<\dfrac{3}{2}$

（３）　異なる実数解をもち、一方の解は正、他方の解が負である。（１０点）
異なる実数解をもち、一方の解は正、他方の解が負である条件は、
$f(0)<0$

$f(0)=9a^2-8<0$ から、$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}<a<\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【Ⅳ】

（１）５人の体重を低い順に並べると、以下のとおりである（6 点　各 3 点）。

52kg, 63kg, 65kg, 71kg, 84kg

よって平均は、

$$\frac{52+63+65+71+84}{5}=67.$$

また、メディアン（中央値）は 65 であることがわかる。

答　平均：67kg、メディアン：65kg

（２）分散は、次のように計算される（6 点　各 3 点）。

$$\frac{(52-67)^2+(63-67)^2+(65-67)^2+(71-67)^2+(84-67)^2}{5}=\frac{225+16+4+16+289}{5}$$

$$=\frac{550}{5}=110.$$

また、標準偏差は $\sqrt{110}$ であるが、

$$\sqrt{110}=\sqrt{2\cdot 5\cdot 11}$$

であるから、これ以上、簡単な形にすることはできない。

答　分散：110、標準偏差：$\sqrt{110}$

（３）10 人の身長を低い順に並べると、以下のとおりである（6 点　各 3 点）。

165cm,167cm,168cm,170cm, 171cm, 172cm,173cm,175cm,177cm, 182cm

よって平均は、

$$\frac{165+167+168+170+171+172+173+175+177+182}{10}=\frac{1720}{10}=172.$$

また、メディアン（中央値）は、

$$\frac{171+172}{2}=171.5.$$

答　平均：172cm、メディアン：171.5cm

（４）分散を求める式の分子において、平均（172 点）と各人の身長との差の 2 乗を合計し、男子生徒の数（10）で割ることにより、計算される（7 点）。

$$\frac{7^2+5^2+4^2+2^2+1^2+0^2+1^2+3^2+5^2+10^2}{10}=\frac{230}{10}=23.$$

答　分散：23